

一类具有非线性发生率的非自治 SEIQR 模型

李冬梅¹, 郭美静¹, 董在飞¹, YUE Wu²

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080;

2. Schlumberger Western Geco, Katy TX, 77494)

摘 要: 考虑了疾病流行期间移民输入和接种、隔离对疾病的控制影响, 建立了一类具有非线性发生率的非自治 SEIQR 模型, 给出模型一致持久性和稳定周期解存在的充分条件。应用模型结果数值模拟分析了隔离对手足口病发病控制的作用。

关键词: 非自治; 一致持久; 周期解; 模型的应用

DOI: 10.15938/j.jhust.2018.01.027

中图分类号: O175.3 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2018)01-0148-07

A Kind of Nonautonomous SEIQR Model with Nonlinear Incidence Rate

LI Dong-mei¹, GUO Mei-jing¹, DONG Zai-fei¹, YUE Wu²

(1. School of Applied Sciences, Harbin University of Science Technology, Harbin 150080, China;

2. Schlumberger Western Geco, Katy TX, 77494, USA)

Abstract: Considering the influence of disease control with immigration input, vaccination and isolation during the disease epidemic, we set up a kind of non-autonomous SEIQR model with nonlinear incidence rate. Some sufficient conditions of consistent persistence and stability of the periodic solution of the model are given. The effect of isolation on the control of hand, foot and mouth disease is analyzed by numerical simulations the application of the model solution.

Keywords: nonautonomous, consistent persistence, periodic solution, application of the model

0 引 言

传染病每次到来都会对人类的健康造成危害, 许多传染病的发病与季节有关, 如流感, 风疹等疾

病。在发病期间, 染病者与潜伏者的输入, 会引起疾病的蔓延, 人们会采取接种疫苗、隔离和治疗等常见手段进行预防疾病的爆发和流行。考虑到疾病季节性的周期变化的关系, 许多学者借助非自治传染病模型从理论上来研究防控方法对疾病控制作用, 预

收稿日期: 2016-03-22

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A2016004); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12521099)。

作者简介: 郭美静(1991—), 女, 硕士研究生;

董在飞(1989—), 男, 硕士研究生。

通信作者: 李冬梅(1962—), 女, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: dmli_2013@126.com.

测传染病的传播规律^[1-3]。如下面具有双线性发生率的非自治 SEIR 传染病模型解的正性、疾病的持久性、周期解的存在性及稳定性研究疾病的发展规律^[4-5]。

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= (1-b(t))A(t) - d(t)S(t) - \lambda(t)I(t)S(t) \\ E'(t) &= b(t)A(t) - d(t)E(t) - \varepsilon(t)E(t) + \lambda(t)I(t)S(t) \\ I'(t) &= \varepsilon(t)E(t) - d(t)I(t) - \alpha(t)I(t) - \gamma(t)I(t) \\ R'(t) &= \gamma(t)I(t) - d(t)R(t) \end{aligned} \right\}$$

传染病主要是易感者与染病者有效接触引起疾病的传播,疾病的发生率在描述疾病的传播过程有着重要作用,常见的发生率有双线性发生率 βSI ,标准型发生率 $\beta SI/N$ ^[6]。随着深入的研究发现,很多传染病的传播机制并没有完全为人所知,发生率依赖于易感者和感染者相互作用的非线性形式 $f(S)g(I)$, $f(S,I,N)$ 更符合实际,用其建立的传染病模型,从理论上能够揭示传染病发展规律^[7-10]。但在研究过程中发现,一般形式非线性发生率在应用中是比较困难的,将一般发生率的表述成为较为近似的具体函数式,能够很好模拟疾病传播规律。如下面的具有常数输入及非线性发生率的 SIQR 传染病模型^[11]

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= A - \beta S^2(t) - dS(t) \\ I'(t) &= \beta S(t)I^2(t) - (d+a+r+\mu)E(t) \\ Q'(t) &= \mu I - (d+b+p)Q(t) \\ R'(t) &= rI(t) + pQ(t) - dR(t) \end{aligned} \right\}$$

根据疾病的传播特征,如传染力强的疾病或是易感人群比较密集场所,还有其它不同形式的非线性发生率,形如 $\beta S^p I^q$,饱和发生率 $\beta SI/(S+\alpha I)$, $\beta SI/(1+\alpha I^q)$, $\beta SI/(1+\alpha S^p)$ 非线性发生率,用其建立传染病模型 SIQR,SEIR,SEIQR 也取得阶段性的研究成果^[12-17]。

本文在现有工作的基础上,考虑具有季节性发病的传染病,用非线性发生率 $\beta(t)S(t)I^2(t)$ 描述疾病传播规律,建立一类具有非线性发生率的非自治的 SEIQR 模型,通过对模型的动力学性质的研究,找到疫苗接种和隔离方法对疾病的防控阈值。并将研究结果用于手足口传染病预防中,借助数值模拟预测防控措施对疾病流行的影响,给出疾病控制方法可行性建议。

考虑了接种对疾病的预防、隔离对疾病控制的影响,潜伏者和患病者均有人口输入,建立了如下非

自治 SEIQR 传染病模型

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= (1-p(t)-q(t))A(t) - \beta(t)S(t)I^2(t) - (\mu(t)+m(t))S(t) \\ E'(t) &= q(t)A(t) + \beta(t)S(t)I^2(t) - (\mu(t)+\varepsilon(t))E(t) \\ I'(t) &= p(t)A(t) + \varepsilon(t)E(t) - (\mu(t)+d_1(t)+\delta(t)+\gamma(t))I(t) \\ Q'(t) &= \delta(t)I(t) - (\mu(t)+d_2(t)+k(t))Q(t) \\ R'(t) &= m(t)S(t) + \gamma(t)I(t) + k(t)Q(t) - \mu(t)R(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ 分别表示 t 时刻易感者类、潜伏者类、染病者类、隔离者类和移出者类的数量; $A(t)$ 表示 t 时刻总移民输入数量; $q(t)$ 为 t 时刻潜伏者输入数量的比例; $p(t)$ 为 t 时刻染病者输入数量的比例($0 \leq p(t) + q(t) \leq 1$); $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$ 为总人口的数量; $\beta(t)$ 表示 t 时刻接触率($\beta(0) > 0$); $\mu(t)$ 表示 t 时刻人口平均死亡率; $\varepsilon(t)$ 表示 t 时刻潜伏者到染病者的转移率; $\delta(t)$ 表示 t 时刻隔离率系数; $d_1(t)$ 表示 t 时刻染病者因病死亡率; $d_2(t)$ 表示 t 时刻隔离者因病死亡率; $\gamma(t)$ 表示 t 时刻染病者的治愈率; $k(t)$ 表示 t 时刻隔离者的恢复率; $m(t)$ 表示 t 时刻对易感者的接种率。

假设模型(1)中的各参数在 R 上均为正的连续的 ω 周期函数;模型(1)任意解($S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t)$)的初始值($S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0)$)满足

$$S(0) > 0, E(0) > 0, I(0) > 0, Q(0) > 0, R(0) > 0 \quad (2)$$

同时定义如下符号:

$$\inf_{t \in [0, \omega]} f(t) = f^L, \sup_{t \in [0, \omega]} f(t) = f^M$$

1 模型解的正性

定理 1 模型(1)满足初始条件(2)的解为正解。

证明: 由模型(1)的第一个方程知,当 $t > 0$ 时,有 $S(t) > 0$ 。否则,存在 $t_0 > 0$,使得 $S(t_0) = 0$,取 $T_0 = \inf\{t_0 > 0 | S(t_0) = 0\}$, $S(T_0) = 0$,并且 $S'(T_0) < 0$ 。由式(1)知, $S'(T_0) = (1-p(T_0)-q(T_0))A(T_0) > 0$,矛盾。故 $S(t) > 0$ 。

由模型(1)的第3个方程,当 $t > 0$ 时,有 $I(t) > 0$ 。否则,存在 $t_1 > 0$,使得 $I(t_1) = 0$,取 $T_1 = \inf\{t_1 > 0 | I(t_1) = 0\}$, $I(T_1) = 0$, $I'(T_1) = p(T_1)A(T_1) + \varepsilon(T_1)E(T_1) < 0$ 。由假设知, $p(T_1)A(T_1) > 0$,

$\varepsilon(T_1) > 0$, 从而有 $E(T_1) < 0$. 故存在 $0 < t_2 < T_1$, 使得 $E(t_2) = 0$, 取 $T_2 = \inf\{t_2 > 0 | E(t_2) = 0\}$, $E(T_2) = 0$, $E'(T_2) < 0$. 由于 $S(t) > 0$, 且 $I(T_2) > 0$, $E'(T_2) = q(T_2)A(T_2) + \beta(T_2)g(S(T_2))I(T_2) > 0$, 矛盾. 所以 $I(t) > 0$.

由模型(1)的第2个方程知, $E'(t) \geq -(\mu(t) + \varepsilon(t))E(t)$, 再由比较定理可得, 对任意的 t , 有 $E(t) > 0$. 同理可求得 $Q(t), R(t)$ 非负. 证毕.

由模型(1)可得

$$N'(t) \leq A(t) - \mu(t)N(t)$$

可得到模型(1)的可行域为

$$\Omega = \{(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t)) | 0 < S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \leq (A/\mu)^M\}$$

显然 Ω 是模型(1)的正向不变集.

2 模型的一致持久性

定理2 模型(1)在 Ω 上是一致持久的.

证明: 在 Ω 上, 模型(1)的解 $(S(t), E(t), I(t), Q(t), R(t))$ 有上界, 只需证明其是解下界的.

由模型(1)的第一个方程可知

$$S'(t) \geq (1-p(t)-q(t))A(t) - \left\{ \mu(t) + m(t) + \beta(t) \left[\frac{A}{\mu} \right]^M \right\} S(t) \geq \left\{ \mu + m + \beta \left[\frac{A}{\mu} \right]^M \right\} \cdot \left\{ \frac{(1-p-q)A}{\mu + m + \beta [A/\mu]^M} - S(t) \right\}$$

及比较原理可得

$$S(t) \geq \left(1 - e^{-\{\mu + m + \beta [A/\mu]^M\}^2 t} \right) \cdot \left(\frac{(1-p-q)A}{\mu + m + \beta [A/\mu]^M} \right)^L + e^{-\{\mu + m + \beta [A/\mu]^M\}^2 t} S(0)$$

可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \left(\frac{(1-p-q)A}{\mu + m + \beta [A/\mu]^M} \right)^L = v_1$$

再由模型(1)的第二个方程知

$$E'(t) \geq q(t)A(t) - (\mu(t) + \varepsilon(t))E(t)$$

同理有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} E(t) \geq \left(\frac{qA}{\mu + \varepsilon} \right)^L = v_2$$

由模型(1)第3个方程可得

$$I'(t) \geq p(t)A(t) + \varepsilon(t)v_2 - (\mu(t) + d_1(t) + \delta(t) + \gamma(t))I(t)$$

同理有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq \left(\frac{pA + \varepsilon v_2}{\mu + d_1 + \delta + \gamma} \right)^L = v_3$$

再由模型(1)第4个方程可得

$$Q'(t) \geq \delta(t)v_3 - (\mu(t) + d_2(t) + k(t))Q(t)$$

同理有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} Q(t) \geq \left(\frac{\delta v_3}{\mu + d_2 + k} \right)^L = v_4$$

由模型(1)的第5个方程可知

$$R'(t) \geq m(t)v_1 + \gamma(t)v_3 + k(t)v_4 - \mu R(t)$$

同理可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) \geq \left(\frac{mv_1 + \gamma v_3 + kv_4}{\mu} \right)^L = v_5$$

故模型(1)在 Ω 是一致持久的^[8]. 证毕.

3 周期解的存在性及稳定性

在 R^4 中定义范数为 $\|X\| = \max\{|S|, |E|, |I|, |Q|, |R|\}$, $X = (S, E, I, Q, R) \in R^4$. 设模型(1)满足解存在唯一性条件, 对应初值 $X_0 = (S(0), E(0), I(0), Q(0), R(0))$ 的解为

$$X(t, X_0) = (S(t, X_0), E(t, X_0), I(t, X_0), Q(t, X_0), R(t, X_0)), X(0, X_0) = X_0$$

定义位移算子, 即 Poincare 周期映射 $L: R^4 \rightarrow R^4$, $LX_0 = X(\omega, X_0)$

其中 ω 是模型(1)中参数函数的周期. 由映射 L 的定义知, 其不动点就是模型(1)的周期解.

定理3 模型(1)在 Ω 内至少存在一个以 ω 为周期的正周期解.

证明: 由定理1, 定理2知, 模型(1)的任意解在 Ω 内是正, 且 Ω 是模型(1)的有界不变闭凸集, L 是 Ω 到自身的变换, 所以, $L\Omega \subset \Omega$, 由解对初值的连续依赖性知, L 是连续的, 再由不动点定理可得, 在 Ω 上的变换至少 L 存在一个不动点. 因此, 模型(1)至少存在一个以 ω 为周期的正周期解. 证毕.

由于模型(1)的前三个方程与 $Q(t), R(t)$ 无关, 所以只需考虑模型(1)对应的子模型:

$$\left. \begin{aligned} S'(t) &= (1-p(t)-q(t))A(t) - \beta(t)S(t)I(t) - (\mu(t) + m(t))S(t) \\ E'(t) &= q(t)A(t) + \beta(t)S(t)I(t) - (\mu(t) + \varepsilon(t))E(t) \\ I'(t) &= p(t)A(t) + \varepsilon(t)E(t) - (\mu(t) + d_1(t) + \delta(t) + \gamma(t))I(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

可得到模型(3)的可行域为

$$\Omega' = \{(S(t), E(t), I(t)) | 0 < S(t) + E(t) + I(t) \leq (A/\mu)^M\}$$

同时, Ω 也是模型 (3) 的正向不变集。

定理 4 若 $(\mu+m)^L + (\beta)^L \left(\frac{pA + \varepsilon v_2}{\mu + d_1 + \delta + \gamma} \right)^2 > (\beta)^M (A/\mu)^2, (\mu+\varepsilon)^L > (\varepsilon)^M, (\mu+d_1+\delta+\gamma)^L > 4(\beta)^M (A/\mu)^2$ 成立, 则模型 (3) 有一个以 ω 为周期的全局渐近稳定的周期解 $(S^*(t), E^*(t), I^*(t))$ 。

证明: 设模型 (3) 的任意正解为 $(S(t), E(t), I(t))$ 。由定理 3 知, 模型 (3) 存在正周期解为 $(S^*(t), E^*(t), I^*(t))$ 。

选取 Lyapunov 函数

$$V(t) = |S^*(t) - S(t)| + |E^*(t) - E(t)| + |I^*(t) - I(t)|$$

将 $V(t)$ 关于模型 (3) 的求右导数

$$D^+ V(t) = D^+ |S^*(t) - S(t)| + D^+ |E^*(t) - E(t)| + D^+ |I^*(t) - I(t)| \quad (4)$$

$$\begin{aligned} D^+ |S^*(t) - S(t)| &= \text{sign}(S^*(t) - S(t)) (S^{*'}(t) - S'(t)) = \\ &= \text{sign}(S^*(t) - S(t)) [-(\mu(t) + m(t))(S^*(t) - S(t)) - \\ &\quad \beta(t) I^{*2}(S^*(t) - S(t)) - \beta(t) S(t)(I^*(t) + \\ &\quad I(t))(I^*(t) - I(t))] \leq \\ &\quad -[\mu+m]^L + (\beta)^L v_3^2 |S^*(t) - S(t)| + \\ &\quad (\beta)^M 2(A/\mu)^4 \cdot |I^*(t) - I(t)| \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} D^+ |E^*(t) - E(t)| &= \text{sign}(E^*(t) - E(t)) (E^{*'}(t) - E'(t)) = \\ &= \text{sign}(E^*(t) - E(t)) [-(\mu(t) + \varepsilon(t))(E^*(t) - E(t)) + \\ &\quad \beta(t) I^{*2}(S^*(t) - S(t)) + \beta(t) S(t)(I^*(t) + I(t))(I^*(t) - I(t))] \leq \\ &\quad -(\mu+\varepsilon)^L |E^*(t) - E(t)| + (\beta)^M (A/\mu)^4 |S^*(t) - S(t)| + \\ &\quad (\beta)^M 2(A/\mu)^4 \cdot |I^*(t) - I(t)| \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} D^+ |I^*(t) - I(t)| &= \text{sign}(I^*(t) - I(t)) (I^{*'}(t) - I'(t)) = \\ &= \text{sign}(I^*(t) - I(t)) [\varepsilon(t)(E^*(t) - E(t)) - (\mu(t) + d_1(t) + \\ &\quad \delta(t) + \gamma(t))(I^*(t) - I(t))] \leq \\ &\quad (\varepsilon)^M |E^*(t) - E(t)| - (\mu + d_1 + \delta + \gamma)^L |I^*(t) - I(t)| \end{aligned} \quad (7)$$

将式 (5)、(6)、(7) 代入式 (4) 中, 可得

$$\begin{aligned} D^+ V(t) &\leq -[\mu+m]^L + (\beta)^L v_3^2 - (\beta)^M (A/\mu)^4 \\ &\quad |S^*(t) - S(t)| - [\mu+\varepsilon]^L - (\varepsilon)^M |E^*(t) - E(t)| - \\ &\quad [\mu+d_1+\delta+\gamma]^L - 4(A/\mu)^4 (\beta)^M |I^*(t) - I(t)| \end{aligned} \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \left\{ (\mu+m)^L + (\beta)^L \left(\frac{pA + \varepsilon v_2}{\mu + d_1 + \delta + \gamma} \right)^2 - \right. \\ &\quad (\beta)^M (A/\mu)^2, (\mu+\varepsilon)^L - (\varepsilon)^M, (\mu+d_1+\delta+\gamma)^L - \\ &\quad \left. 4(\beta)^M (A/\mu)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{则 } D^+ V(t) \leq -\alpha V(t)$$

存在 $T > 0$, 当 $t > T, V(t) \leq V(0) e^{-\alpha t}$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ 。则模型 (3) 的周期解是全局渐近稳定的。证毕。

4 数值模拟

分别取模型 (2) 的参数为 $A = 0.2 + 0.1 \sin t, q = 0.3 + 0.1 \sin t, p = 0.2 + 0.1 \sin t, \beta = 0.2 - 0.05 \sin t, m = 0.2 + 0.1 \sin t, \mu = 0.4 + 0.1 \sin t, \varepsilon = 0.2 + 0.1 \sin t, d_1 = 0.45 + 0.1 \sin t, \delta = 0.15 + 0.1 \sin t, \gamma = 0.6 + 0.1 \sin t$ 。

取初值 $(0.4, 0.4, 0.4)$, 由定理 2 及定理 4 知, 模型 (2) 的周期解是全局渐近稳定的并且是持久的, 模拟如图 1。下面在进一步观察, 若是 $q(t)$ 潜伏者输入数量比例与 $p(t)$ 染病者输入数量的比例有所改变, 其他参数及初值不变情况下, 对染病者的变化影响。选取 $q = 0.3 + 0.1 \sin t, p = 0.4 + 0.1 \sin t$, 模拟如图 2。选取 $q = 0.3 + 0.1 \sin t, p = 0.4 + 0.01 \sin t$, 模拟如图 3。选取 $q = 0.1 + 0.1 \sin t, p = 0.4 + 0.1 \sin t$, 模拟如图 4。

对比图 1 与 2 可得: 潜伏者输入相同, 染病者输入比例减少时, 染病者趋于更小的数值。对比图 1 与 4 可得: 当易感者人口输入相等时, 易感者与染病者变化不显著, 但图 4 的潜伏者数量明显降低, 故在此种情况下, 应尽力消减潜伏者的输入的比例。对比图 2 与 4 可得: 潜伏者移民输入比例减少, 对于染病者的数量影响很小, 但是易感者数量明显增加同时易感者数量也有降低。

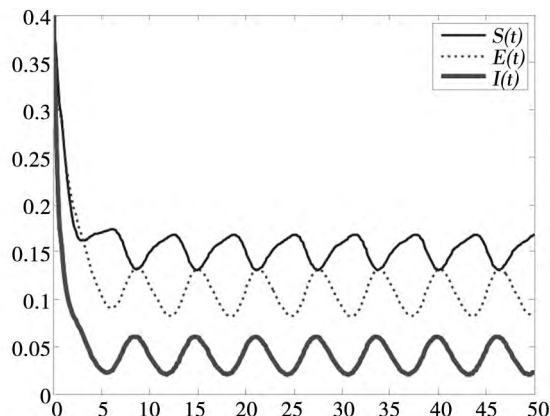


图 1 当 $q = 0.3 + 0.1 \sin t, p = 0.2 + 0.1 \sin t$ 时, 周期解的稳定性

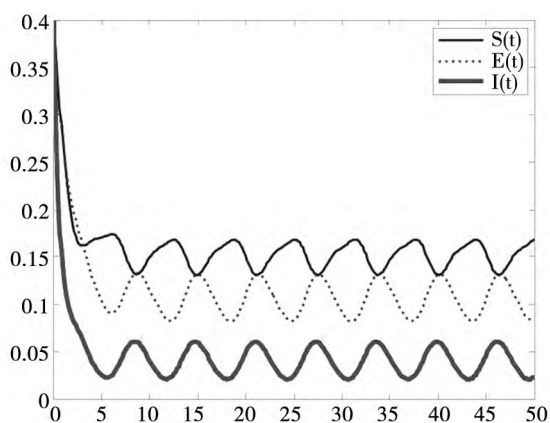


图2 当 $q = 0.3 + 0.1\sin t, p = 0.4 + 0.1\sin t$ 时,
周期解的稳定性

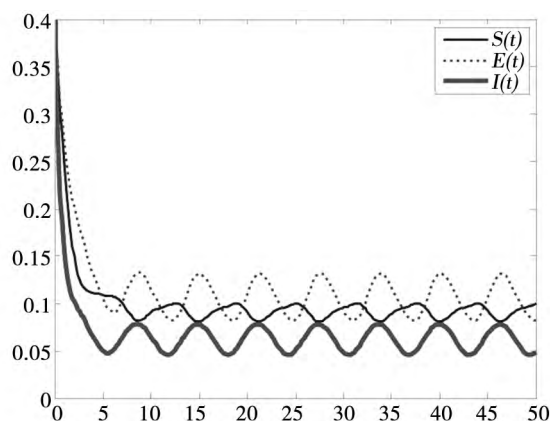


图3 当 $q = 0.3 + 0.1\sin t, p = 0.4 + 0.01\sin t$ 时,
周期解的稳定性

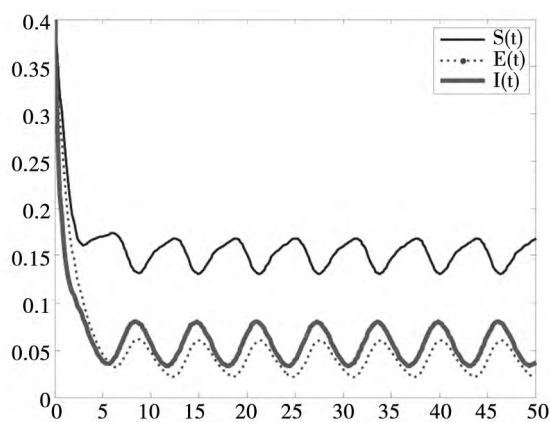


图4 当 $q = 0.1 + 0.1\sin t, p = 0.4 + 0.1\sin t$ 时,
周期解的稳定性

5 模型应用

手足口病是由多种肠道病毒引起的一种儿童常见传染病,近年来,国内手足口病不断出现多发或高发状况。2008—2009年全国手足口病发病水平呈上升趋势,2009年全国手足口病发病率比2008年上升135.13%,托幼机构儿童聚集发病常有发生,手足口病的防控工作面临巨大挑战。手足口病是我国法定报告管理的丙类传染病,多流行于夏、秋季,传染性强、隐性感染比例较大,传播速度快,短时间内易造成较大范围的流行,疫情控制难度大。近年来,手足口病在我国爆发的次数和患病人数均呈上升趋势,手足口病已成为危害我国人群健康的一种疾病^[8]。统计分析发现,气候是影响手足口病蔓延的一个重要因素,每年的6—7月出现发病的高峰^[9]。手足口病威胁着人类的健康,是社会共同面临的问题。如何有效的预防与控制手足口病是一项重要的社会工作。

根据国家统计局统计公报^[20-21],近年来我国人口死亡率为6.4‰~6.93‰,人口输入率为6.01‰~6.95‰。由于一年包含12个月,而疾病的高发时段为6至7月份,故选取周期为 4π 的正弦函数 $\sin t/2$,进而可得 $\mu(t) = 0.0067 + 0.0002\sin t/2$, $A(t) = 0.0065 + 0.0005\sin t/2$ 。再推算得到 $\varepsilon(t) = 0.0055 + 0.0005\sin t/2$, $d_1 = 0.0072 + 0.0002\sin t/2$, $\delta = 0.005$, $\gamma = 0.0075$, $m(t) = 0.003$ 。在疾病流行期间,可以检测到患病者数量,将染病者输入率选为常值取 $p = 0.1$;再根据疾病传播的季节性,潜伏者的移民输入、接触率可视为一种周期波动函数。

针对不同潜伏者输入率、接触率,讨论其对疾病发展趋势的影响。在其它参数不变的前提下,选取接触率 $\beta(t) = 0.0055 + 0.0005\sin t/2$,而潜伏者输入率分别取为 $q(t) = 0.2 + 0.1\sin t/2$ 和 $q(t) = 0.4 + 0.1\sin t/2$,再取初值 $(0.3, 0.25, 0.2)$ 模拟图见图5、图6。如选取潜伏者输入率为 $q(t) = 0.4 + 0.1\sin t/2$,而接触率分别取 $\beta(t) = 0.2 + 0.01\sin t/2$ 和 $\beta(t) = 0.2 + 0.1\sin t/2$,再取初始值 $(0.1, 0.15, 0.2)$,参数选取见表1,模拟图见如图7、图8。

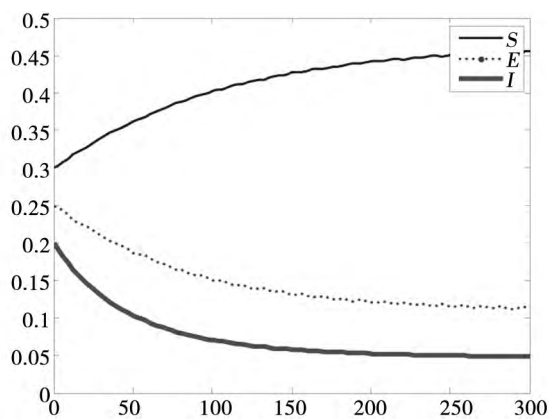


图 5 当 $q=0.2+0.1\sin t/2, p=0.1$ 时, 周期解的稳定性

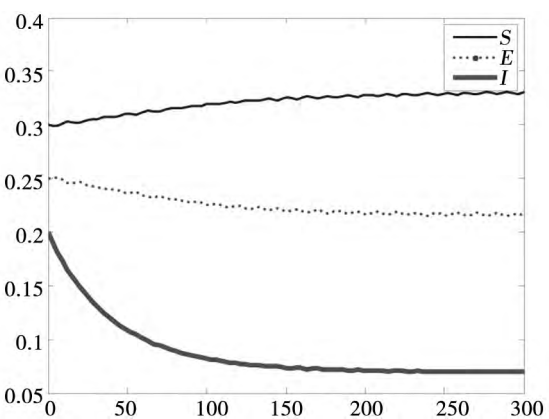


图 6 当 $q=0.4+0.1\sin t/2, p=0.1$ 时, 周期解的稳定性

表 1 参数选取对疾病的影响

参数 $p(t)$	参数 $\beta(t), q(t)$	参数 $q(t), \beta(t)$	图像序号	图像表现
$p=0.1$	$\beta=0.0055+0.0005\sin t/2$	$q=0.2+0.1\sin t/2$	图 5	潜伏者增加会引起
		$q=0.4+0.1\sin t/2$	图 6	染病者人数减少
	$q=0.4+0.1\sin t/2$	$\beta=0.2+0.01\sin t/2$	图 7	接触率增大会引起
		$\beta=0.2+0.1\sin t/2$	图 8	潜伏人数增加

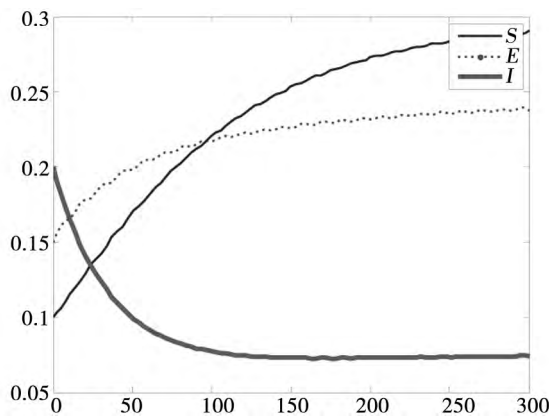


图 7 当 $\beta=0.2+0.01\sin t/2, p=0.1$ 时, 周期解的稳定性

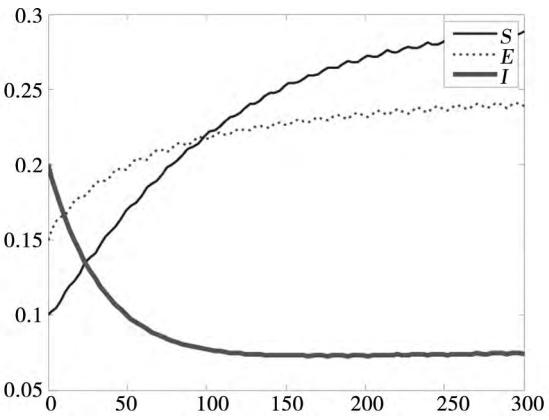


图 8 当 $\beta=0.2+0.1\sin t/2, p=0.1$ 时, 周期解的稳定性

由于选取的各系数较小,并有出现明显的波动形态。但是对比图 5 和 6 可以发现: 当潜伏者输入波动降低时,易感者人群数增加,潜伏者人群和染病者人群都减少,有利于疾病流行的控制。

对比图 7 和 8 可以发现: 虽然最后易感者、潜伏者和患病者最终趋近的数值相同,但是图 8 在趋近的过程中波动较为明显,由于接触率的增加会蔓延到染病者的增加,最终会导致疾病的流行,不利于疾病的控制。

在手足口病发病期间,为防止病情的进一步发展,应减少重症病例的出现;加强检查,降低由潜伏者向患病者的转移率;加强疫情监测和疫情报告工作,及时发现病例并采取消毒隔离等防控措施;开展针对性的大众健康教育活动,提高防病意识,让群众掌握并落实相关的预防控制措施,增强基层医疗单位对手足口病的诊断和救治能力,加强对聚集场所的卫生管理,防止聚集性病例和爆发疫情的发生。

参考文献:

- [1] EI-Sheikh MM A, EI-Marouf S A A. Global Analysis of an Epidemic Model with General Incidence Rate [J]. Journal of American Science, 2010, 6(11): 770–783.
- [2] TENG Z, LIU Y, ZHANG L. Persistence and Extinction of Disease in Nonautonomous SIRS Epidemic Models with Disease-induced Mortality [J]. Nonlinear Anal, 2008, 69: 2599–2614.
- [3] LIU J, ZHANG T. Analysis of a Nonautonomous Epidemic Model with Density Dependent Birth Rate [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34: 866–877.
- [4] 李冬梅, 桂春羽, 方健. 潜伏期带有输入的非自治 SEIR 传染病模型 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2013, 18(2): 126–130.
- [5] 丁玲芬, 李建利. 一类具有垂直传染非自治的 SEIR 传染病模型 [J]. 云南大学学报(自然科学版), 2008, 30(2): 139–143.
- [6] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科技出版社, 2001.
- [7] 杨俊仙, 徐丽. 一类具非线性发生率的 SIQS 传染病模型的动力学性态分析 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2015, 42(3): 271–275.
- [8] BERETTA E, BREDA D. An SEIR Epidemic Model with Constant Latency Time and Infectious Period [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2011, 8(4): 931–952.
- [9] KOROBINKOV A, MAINI P K. Nonlinear Incidence and Stability of Infectious Disease Models [J]. Mathematical Medicine and Biology, 2005, 22(2): 113–128.
- [10] 宋修朝, 李建全, 杨亚莉. 一类具有非线性发生率的 SEIR 传染病模型的全局稳定性分析 [J]. 工程数学学报, 2016, 33(2): 175–183.
- [11] 宋燕, 庞天舒. 具有常数输入及非线性发生率的 SIQR 传染病模型 [J]. 生物数学学报, 2013, 28(3): 454–460.
- [12] LI M Y, MULDOWNY J S. Global Stability for the SEIR Model in Epidemiology [J]. Mathematical Bioscience, 1995, 125(2): 155–164.
- [13] LIU W M, HETHCOTE H W, Levin S A. Dynamical Behaviour of Epidemiological Models with Nonlinear Incidence Rates [J]. Journal of Mathematical Biology, 1987, 25(4): 359–380.
- [14] 王娟, 韩欲清, 李学志. 一类具有非线性发生率的传染病模型的稳定性 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(12): 112–117.
- [15] 李桂花, 白京. 一类具有非线性发生率和治疗函数的传染病模型研究 [J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(21): 228–236.
- [16] 徐文雄, 张太雷, 徐宗本. 非线性高维自治微分系统 SIEQR 流行病模型全局稳定性 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(2): 79–86.
- [17] 刘莱, 宋燕, 许浩然, 等. 具有连续接种且是非线性传染率的 SIQR 传染病模型 [J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2010, 31(4): 335–338.
- [18] 胡跃华, 肖革新, 郭莹, 等. 2008–2011 年中国大陆手足口病流行特征分析 [J]. 中国疾病控制杂志, 2014, 18(8): 693–697.
- [19] 田辉, 杨培荣, 巨洲峰, 等. 气象因素对手足口病发病影响及预测模型分析 [J]. 中国学校卫生, 2013, 34(4): 451–453.
- [20] 杨芳, 于石成, 张菊英, 等. 2008–2011 年中国大陆地区重症手足口病流行特征分析 [J]. 传染病监测, 2013, 28(11): 888–893.
- [21] 姚兴宽, 于杰. 2012 年安阳市手足口病流行特征及病原学分析 [J]. 应用预防医学, 2014, 20(4): 223–227.

(编辑: 温泽宇)